Ανάλυση της Επίδοσης των Μαθητών σε Διαγώνισμα Προσομοίωσης των Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου: Συμπεράσματα & Προτάσεις

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Νομού Κιλκίς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η οργάνωση του διαγωνίσματος προσομοίωσης ξεκίνησε στα τέλη Φεβρουαρίου 2013 ύστερα από έγγραφη πρόσκληση του Σχολικού Συμβούλου προς τους εκπαιδευτικούς ειδικότητας ΠΕ03 των Λυκείων του νομού, και αφού είχαν προηγηθεί σχετικές συζητήσεις κατά τις επισκέψεις στα σχολεία. Στο διαγώνισμα δήλωσαν συμμετοχή τα Λύκεια 1^{ο} Κιλκίς, 2^{ο} Κιλκίς, Καμπάνη, Χέρσου, Ευρωπού, Πολυκάστρου και Αξιούπολης (δηλαδή όλα πλην των Λυκείων Γουμένισσας και Σ.Σ. Μουριών). Για την επιλογή των θεμάτων και την οργάνωση του διαγωνίσματος, δημιουργήθηκε επιτροπή στην οποία συμμετείχαν οι εξής εκπαιδευτικοί (κατά αλφαβητική σειρά):

Αναστασία Γαζέπη	2^{ο} ΓΕ.Λ. Κιλκίς
Αναστάσιος Γκόλφος	ΓΕ.Λ. Καμπάνη
Δημήτριος Καλιεντζίδης	1^{ο} ΓΕ.Λ. Κιλκίς
Γεώργιος Κατίδης	2^{ο} ΓΕ.Λ. Κιλκίς
Σωκράτης Κόνιας	1^{ο} ΓΕ.Λ. Κιλκίς
Παρασκευή Κυριακοπούλου	ΓΕ.Λ. Αξιούπολης
Δημήτριος Πάσσος	2^{ο} ΓΕ.Λ. Κιλκίς
Κυριάκος Πλατής	ΓΕ.Λ. Χέρσου
Οδυσσέας Σταμέλος	ΓΕ.Λ. Ευρωπού
Αλέξανδρος Φωκαδέλης	ΓΕ.Λ. Πολυκάστρου

Η επιτροπή πραγματοποίησε 4 συνεδριάσεις (13/3, 15/3, 29/3 και 10/4/2013), στη διάρκεια των οποίων έγινε εκτεταμένη συζήτηση για τους στόχους, την επιλογή και τη βαθμολόγηση των θεμάτων του διαγωνίσματος. Βασικό κριτήριο της επιλογής υπήρξαν τα θέματα της Κεντρικής Επιτροπής Εξετάσεων των ετών 2011 και 2012, τα οποία χαρακτηρίζονταν από μια υπέρμετρη αύξηση του πλήθους των ερωτημάτων που με άμεσο η έμμεσο τρόπο κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί κάθε Λυκείου ενημέρωσαν τους μαθητές τονίζοντας τον προαιρετικό χαρακτήρα της συμμετοχής και το διαγώνισμα πραγματοποιήθηκε την Παρασκευή 12 Απριλίου 2013.

Ο επόμενος πίνακας δείχνει τον αριθμό και το ποσοστό των μαθητών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης κάθε Λυκείου που συμμετείχαν στο διαγώνισμα προσομοίωσης:

Πίνακας Συμμετοχής

Σχολείο	Αριθμός Μαθητών	Ποσοστό
1ο Γ.Ε.Λ. Κιλκίς	31/86	36%
2ο ΓΕ.Λ. Κιλκίς	23/52	44%
ΓΕ.Λ. Καμπάνη	13/19	68%
ΓΕ.Λ. Χέρσου	5/8	63%
ΓΕ.Λ. Πολυκάστρου	18/33	55%
ΓΕ.Λ. Αξιούπολης	2/17	12%
ΓΕ.Λ. Ευρωπού	6/10	60%
Σύνολο	98/225	44%

Για να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή αντικειμενικότητα της βαθμολόγησης, στάλθηκαν στα Λύκεια ενδεικτικές λύσεις του διαγωνίσματος προσομοίωσης με παρατηρήσεις για τις διάφορες πιθανές απαντήσεις των μαθητών και υποδείξεις για τη μοριοδότησή τους. Επίσης ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να καταγράψουν από τα γραπτά δοκίμια κάθε στοιχείο που θα βοηθούσε σε μια ποιοτική ανάλυση της επίδοσης.

Η βαθμολογία, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί, υπήρξε γενικά χαμηλή, αλλά αυτό είναι ένα ζήτημα που δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια καθώς θα εστιάσουμε σε ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά της επίδοσης των μαθητών.

Πίνακας Κατανομής Βαθμολογίας στην Κλίμακα 0 – 100

Κλάση	Αριθμός Μαθητών	Ποσοστό
[0, 25]	14+09+07+01+08+00+04 = 43	44%
[26, 50]	09+05+05+03+06+01+01 = 30	31%
[51, 70]	05+06+01+01+03+01+01 = 18	18%
[71, 80]	03+02+00+00+00+00+00 = 05	5%
[81, 90]	00+01+00+00+01+00+00 = 02	2%
[91, 100]	00+00+00+00+00+00+00 = 00	0%
Σύνολο	98	100

Το Φύλλο Θεμάτων που διαμορφώθηκε από την επιτροπή και δόθηκε στους μαθητές περιείχε τα εξής:

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της κυρτής και της κοίλης συνάρτησης. Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $z \in C$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$. Μονάδες 2

β. Αν $f : A \to R$ είναι συνάρτηση 1 – 1, τότε ισχύει $f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ x \in A$. Μονάδες 2

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_o, τότε $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και $f'(x_o) = 0$, τότε η f παρουσιάζει πάντοτε τοπικό ακρότατο στο x_o. Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] ισχύει η πρόταση:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \alpha z + 1 = 0$, με $z \in C$, $\alpha \in R$ και ρίζες z_1, z_2.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = -1$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση. Μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει $z_1^\nu + z_2^\nu \in R$. Μονάδες 6

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς u, με $u \neq 3i$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$z_1(u - 3i)^{2013} + z_2(\bar{u} + 3i)^{2012} = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των αριθμών u ανήκουν σε κύκλο. Μονάδες 7

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $4 \leq |u + 3 + i| \leq 6$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

i) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x-1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ii) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

iii) $f(1) = e$ και $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}},\ \ x \in \mathbb{R}^*$ Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 5

Γ3. Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να προσδιορίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = 2013. Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq \dfrac{1}{e}$. Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{αν } 0 < x \leq \pi^2 \\ \alpha & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του α∈R, ώστε η f να είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\ \pi^2\right]$

Μονάδες 3

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f. Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $\left[0,\ \pi^2\right]$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt,\ x \in \left(0,\ \pi^2\right]$ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης F^{-1}. Μονάδες 6

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_{x}^{x+1} f(t)dt > \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in \left(0,\ \pi^2 - 2\right)$ Μονάδες 6

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Τα ποιοτικά στοιχεία που συγκεντρώθηκαν ύστερα από τη βαθμολόγηση των γραπτών του διαγωνίσματος προσομοίωσης αναδεικνύουν ορισμένα βασικά προβλήματα της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών σε ολόκληρο το φάσμα της Λυκειακής εκπαίδευσης. Για να διευκολυνθεί η παρουσίαση έχουμε ταξινομήσει τα στοιχεία αυτά σε 5 ενότητες με τους εξής τίτλους:

1. Ακραία φαινόμενα στον υπολογισμό της τιμής μιας παραμέτρου (Β1)
2. Αλγεβρικός λογισμός και γεωμετρική ερμηνεία στην απόδειξη μιας ανισότητας (Β3)
3. Μια βασική παρανόηση για την έννοια της απόδειξης (Γ1)
4. Παρανοήσεις για τις τοπικές και ολικές ιδιότητες των συναρτήσεων, τα όρια και τις απροσδιόριστες μορφές (Δ1, Δ2)
5. Παρενέργειες της κατάχρησης υπαρξιακών θεωρημάτων (Δ4)

1. Ακραία φαινόμενα στον υπολογισμό της τιμής μιας παραμέτρου

Θέμα Β1. Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \alpha z + 1 = 0$, με $z \in C$, $\alpha \in R$ και ρίζες z_1, z_2.
Να βρείτε την τιμή του α αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=-1$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

Στο θέμα αυτό η αναμενόμενη από την επιτροπή λύση ήταν μια άμεση και απλή εφαρμογή των τύπων του Vieta, που οι μαθητές γνωρίζουν από την Α΄ Λυκείου:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=-1 \Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1 z_2}=-1 \overset{\text{Vieta}}{\Leftrightarrow} \frac{-\alpha}{1}=-1 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Εδώ καταγράφηκαν δύο ακραία φαινόμενα, που αναδεικνύουν αφενός τη βαθύτατη άγνοια των κανόνων του αλγεβρικού λογισμού από αρκετούς μαθητές της Γ΄ Λυκείου και αφετέρου τις καταστροφικές συνέπειες που έχει η εξάρτηση πολλών (ικανότατων κατά άλλα) μαθητών από τη “μεθοδολογία”.

Παρουσιάζουμε τις λύσεις που έδωσαν στο προηγούμενο θέμα δύο μαθητές, οι οποίοι από πλευράς γνωστικού μαθηματικού υπόβαθρου και ικανοτήτων βρίσκονται στα δύο άκρα του φάσματος. Όπως και σε όλες τις επόμενες περιπτώσεις, οι λύσεις των μαθητών μεταφέρονται αυτούσιες από τα τετράδια τους.

- **Πρώτο ακραίο φαινόμενο (Βαθύτατη άγνοια αλγεβρικού λογισμού)**

$z^2 + αz + 1 = 0$

$Δ = α^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = α^2 - 4$

$$z_{1,2} = \frac{-α \pm \sqrt{α^2 - 4}}{2} = \frac{-α \pm (α - 2)}{2}$$

$$z_1 = \frac{-α + α - 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$z_2 = \frac{-α - α - 2}{2} = \frac{-2α + 2}{2} = \frac{2(-α + 1)}{2} = -α + 1$$

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{-1} + \frac{1}{-α + 1} = -1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{-α + 1} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{-α + 1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{α = 1}$$

οπότε για $α = 1$ η εξίσωση θα γίνει

$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z(z + 1) = -1 \Leftrightarrow z = -1$ ή $z + 1 = -1 \Leftrightarrow z = -2$

Σχόλια

Τα χαρακτηριστικά λάθη της προηγούμενης "λύσης", όπως π.χ.

$$\sqrt{α^2 - 4} = α - 2$$

$$\frac{1}{-α + 1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{α = 1}$$

$$z(z + 1) = -1 \Leftrightarrow z = -1 \text{ ή } z + 1 = -1,$$

έχουν καταγραφεί και μελετηθεί εδώ και αρκετές δεκαετίες από τους ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών, είναι πολύ διαδεδομένα και υπάρχουν διάφορες προτάσεις για την ερμηνεία και την αντιμετώπισή τους.[1]

Στο πλαίσιο όμως της παρούσας εργασίας θεωρούμε πιο σημαντικό να εστιάσουμε την προσοχή σε δύο πολύ χαρακτηριστικά ζητήματα:

α) Ένας μαθητής με τέτοιο χαμηλό επίπεδο αλγεβρικών γνώσεων, το οποίο ουσιαστικά δημιουργείται και εκδηλώνεται στην Γ΄ Γυμνασίου ή την Α΄ Λυκείου, έχει φτάσει να φοιτά στη Θετική/Τεχνολογική Κατεύθυνση της Γ΄ Λυκείου και μάλιστα να δηλώνει συμμετοχή σε διαγώνισμα προσομοίωσης τις παραμονές των πανελλαδικών εξετάσεων.

β) Ο μαθητής αυτός, εκτός από την πλήρη άγνοια του αλγεβρικού λογισμού, αγνοεί επίσης τη σημασία της επαλήθευσης και του ελέγχου των αποτελεσμάτων των αλγεβρικών πράξεων μέσω μιας απλής αριθμητικής αντικατάστασης.

[1] Για το ζήτημα αυτό παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στις εργασίες [1], [2], [3] και [4] που αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Για το ειδικότερο πρόβλημα της άγνοιας βασικών γνώσεων αλγεβρικού λογισμού από μαθητές που διδάσκονται Ανάλυση στην Γ΄ Λυκείου, παραπέμπουμε στο [5].

Αυτά τα δύο ζητήματα πρέπει να προβληματίσουν κάθε εμπλεκόμενο στη διδασκαλία των Μαθηματικών και να γίνουν αντικείμενο ευρύτερης συζήτησης.

- **Δεύτερο ακραίο φαινόμενο (Καταστροφικές συνέπειες της μεθοδολογίας)**

Έχω $z^2 + \alpha z + 1 = 0$ (1) με $z \in C$, $\alpha \in R$ και ρίζες z_1, z_2.

Επειδή οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι ρίζες της (1), θα είναι $\overline{z_1} = z_2$ και πρέπει

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\cdot 1\cdot 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 4 = 2^2$, άρα $\alpha \in (-2, 2)$ (∗)[2]

Άρα αν $z_1 = x + yi$ ($x, y \in R$) είναι $z_2 = x - yi$

Έχω

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+yi} + \frac{1}{x-yi} = -1 \Leftrightarrow \frac{x - yi + x + yi}{x^2 + y^2} = -1 \Leftrightarrow$$
$$2x = -(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 2x + x^2 + y^2 = 0$$

Έχω

$$z_1^2 + \alpha z_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + yi)^2 + \alpha(x + yi) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2xyi - y^2 + \alpha x + \alpha yi + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \alpha x - y^2 + 1) + (2xy + \alpha y)i = 0$$

Πρέπει $\begin{cases} x^2 + \alpha x - y^2 + 1 = 0 \\ 2xy + \alpha y = 0 \end{cases}$

Επίσης

$$z_2^2 + \alpha z_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xyi - y^2 + \alpha x - \alpha yi + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x^2 - y^2 + \alpha x + 1) - (2xy + \alpha y)i = 0$$

Άρα $\begin{cases} x^2 - y^2 + \alpha x + 1 = 0 \\ 2xy + \alpha y = 0 \end{cases}$

Άρα έχω $\begin{cases} x^2 + \alpha x - y^2 + 1 = 0 \\ 2xy + \alpha y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow y(2x + \alpha) = 0$ Άρα $y = 0$ ή $x = -\dfrac{\alpha}{2}$

Ι. Αν $y = 0$ έχω $x^2 + 0^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -2$

Για $x = 0$ είναι $0^2 + \alpha\cdot 0 - 0^2 + 1 \neq 0$, άρα $x = 0$ απορρίπτεται.

Για $x = -2$ έχω $4 - 2\alpha - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha = -5 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{2} > 2$ απορρίπτεται από (∗)

---

[2] Εδώ ο μαθητής θεωρεί εκ προοιμίου ότι η συγκεκριμένη εξίσωση δεν θα έχει πραγματικές ρίζες (πιθανότατα επειδή ταυτίζει το γράμμα z με μιγαδικό, αλλά όχι πραγματικό αριθμό). Αυτό όμως δεν επηρεάζει τη συνέχεια της λύσης.

II. Αν $x=-\frac{\alpha}{2}$ τότε $\frac{\alpha^2}{4}+y^2-2\frac{\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow y^2=\alpha-\frac{\alpha^2}{4}$ οπότε έχω

$$x^2+\alpha x-y^2+1=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4}+\alpha\left(-\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha+\frac{\alpha^2}{4}+1=0$$

$$\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

που είναι δεκτή καθώς ανήκει στο (–2, 2).

Άρα έχω $z^2 + z + 1 = 0$, $\Delta = 1^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3$, δηλαδή $z_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Σχόλια

Στην περίπτωση αυτή έχουμε επίδειξη μιας εκπληκτικής ικανότητας στον αλγεβρικό λογισμό (και ιδιαίτερα στη διαδικασία της διερεύνησης), αν λάβουμε υπόψη ότι ο συγκεκριμένος μαθητής <u>δημιουργεί</u> και <u>επιλύει</u> ένα παραμετρικό σύστημα $2^{ου}$ βαθμού με 3 εξισώσεις. Η ικανότητα όμως αυτή εκδηλώνεται στο συγκεκριμένο θέμα με τελείως αναποτελεσματικό τρόπο. Είναι προφανές ότι η τυφλή εμπιστοσύνη του μαθητή στη "μεθοδολογία" του είδους "για να προσδιορίσω τον μιγαδικό z από μία εξίσωση, θέτω z = x + yi …", τον παγιδεύει σε μια εξαιρετικά χρονοβόρο διαδικασία επίλυσης που θα αποδειχθεί καταστροφική στην αντιμετώπιση των υπόλοιπων θεμάτων του διαγωνίσματος.

Τα σημεία στα οποία θέλουμε να εστιάσουμε την προσοχή είναι τα εξής:

α) Για ποιο λόγο μαθητές με αναμφισβήτητες μαθητικές ικανότητες επιδεικνύουν τόσο μεγάλη εξάρτηση από τη "μεθοδολογία", σε βαθμό που αδυνατούν να διακρίνουν μια απλούστατη λύση λίγων γραμμών;

β) Με ποιο τρόπο η αναπόφευκτη διδασκαλία της "μεθοδολογίας" μπορεί να προλάβει φαινόμενα αυτού του είδους;

2. Αλγεβρικός λογισμός και γεωμετρική εποπτεία στην απόδειξη μιας ανισότητας

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς u οι εικόνες των οποίων ανήκουν στον κύκλο $|u-3i|=1$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $4\le|u+3+i|\le 6$

Στο θέμα αυτό η αναμενόμενη από την επιτροπή λύση ήταν η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας. Θα παρουσιάσουμε τις λύσεις που έδωσαν δύο μαθητές, ο ένας με την αναμενόμενη χρήση της τριγωνικής ανισότητας και ο άλλος με αξιοποίηση της γεωμετρικής ερμηνείας των μιγαδικών αριθμών.

- **Χρήση της τριγωνικής ανισότητας**

Ν.απ.ο. $\quad 4 \le |u+3+i| \le 6$

$$|u+3+i| = |u-3i+3i+3+i| = |(u-3i)+3+4i|$$

<u>Από κριτήριο παρεμβολής έχω</u>:

$$|(u-3i)+3+4i| \le |u-3i| + |3+4i|$$

Από τον κύκλο (1) και τον ορισμό του μέτρου

$$\left.\begin{array}{r} |u-3i| = 1 \\ |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+25} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow |(u-3i)+3+4i| \le 5+1 = 6$$

και $\quad |(u-3i)+3+4i| \ge \big||u-3i| - |3+4i|\big|$

Όμοια $\begin{cases} |u-3i| = 1 \\ |3+4i| = 5 \end{cases}$

Άρα $\quad |(u-3i)+3+4i| \ge |1-5| = |-4| = 4$

Άρα τελικά ισχύει ότι: $\quad 4 \le |u+3+i| \le 6$

Σχόλια

Το μόνο σχόλιο που έχουμε να κάνουμε εδώ είναι η χρήση του όρου “κριτήριο παρεμβολής” (και μάλιστα με υπογράμμιση!) για την τριγωνική ανισότητα. Προφανώς, για τον συγκεκριμένο μαθητή ο κύριος λόγος ύπαρξης μιας διπλής ανισότητας είναι η εφαρμογή της στον υπολογισμό ορίων με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής …

- **Αξιοποίηση της γεωμετρικής ερμηνείας**

Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(0, 3) και ρ = 1.

νδο $\ 4 \le |u+3+i| \le 6$

$m = -3 - i \in C$

$$d(K, m) = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Άρα η απόσταση του μιγαδικού m = –3 – i από το κέντρο Κ του κύκλου ισούται με απόσταση d = 5.

Η ελάχιστη απόσταση του m από το γ.τ. του u είναι: $|u-(-3-i)|_{min} = d-\rho = 5-1 = 4$

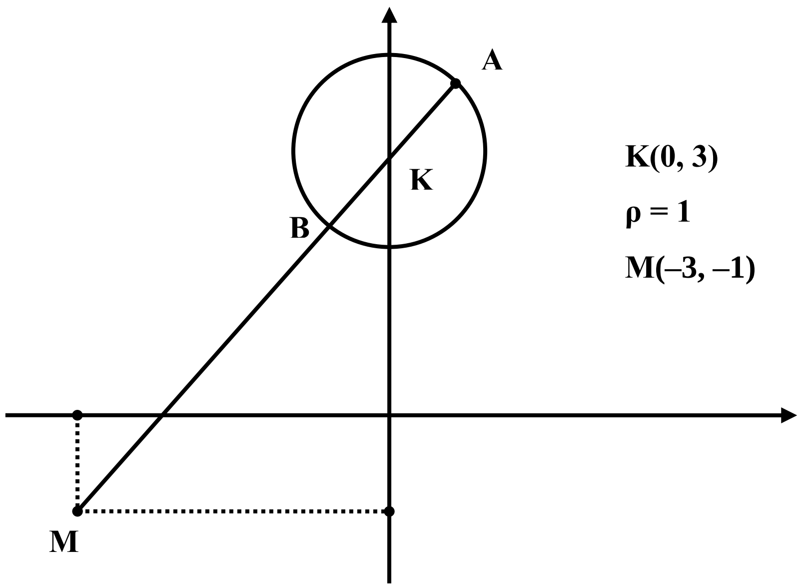
Η μέγιστη απόσταση του m από το γ.τ. του u είναι: $|u-(-3-i)|_{max} = d+\rho = 5+1 = 6$

Επομένως η απόσταση του m από το γ.τ. του u είναι:

$$4 \le |u-(-3-i)| \le 6$$
$$4 \le |u+3+i| \le 6$$

Σχόλια

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής ξεκίνησε γράφοντας στο τετράδιο του την τριγωνική ανισότητα $||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, αλλά στη συνέχεια τη διέγραψε και συνέχισε με τον παραπάνω τρόπο. Είναι χαρακτηριστικό ότι στα τετράδιο δεν υπήρχε κανένα σχήμα, γεγονός που υποδηλώνει μεγάλη ευχέρεια στη γεωμετρική ερμηνεία της αποδεικτέας ανισότητας. Προφανώς το σχήμα που είχε κατά νουν ο μαθητής ήταν το επόμενο:



Είναι συχνό φαινόμενο κατά τη διόρθωση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων στα Βαθμολογικά Κέντρα, να δίνονται από ορισμένους μαθητές ευφυέστατες λύσεις σε θέματα των μιγαδικών αριθμών με αξιοποίηση της γεωμετρικής ερμηνείας και προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το ζήτημα αυτό πρέπει να απασχολήσει σοβαρά τους διδάσκοντες και να συμβάλει σε μια αναθέρμανση του ενδιαφέροντος για την υποβαθμισμένη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.

3. Μια βασική παρανόηση για την έννοια της απόδειξης

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R^*, για την οποία ισχύουν τα εξής:

i) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x-1}{x^2}$ για κάθε $x \in R^*$

ii) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R^*$

iii) $f(1) = e$ και $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$

Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}, \quad x \in R^*$

Στο θέμα αυτό η αναμενόμενη από την επιτροπή λύση ήταν η αναγωγή, αρχικά, της διαφορικής εξίσωσης (i) σε ισότητα των παραγώγων δύο συναρτήσεων:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\ln|f(x)|\right)' = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)', \ x \in R^*$$

Άρα, σύμφωνα με βασική εφαρμογή του σχολικού βιβλίου και λαμβάνοντας υπόψη ότι η προηγούμενη ισότητα ισχύει σε ένωση διαστημάτων, προκύπτει ότι:

$$\ln|f(x)| = \begin{cases} \ln|x| + \dfrac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \ln|x| + \dfrac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\ln|f(x)| = \begin{cases} \ln(-x) + \dfrac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \ln x + \dfrac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow |f(x)| = \begin{cases} e^{\ln(-x)+\frac{1}{x}+c_1}, & x < 0 \\ e^{\ln x+\frac{1}{x}+c_2}, & x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Επειδή f συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R^*$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$. Άρα, από τις υποθέσεις $f(1) = e$ και $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$, προκύπτει ότι είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,\ 0)$. Με τα δεδομένα αυτά, από την (1) βρίσκουμε:

$$-f(-1) = e^{\ln 1 - 1 + c_1} \Leftrightarrow \frac{1}{e} = e^{c_1 - 1} \Leftrightarrow e^{-1} = e^{c_1 - 1} \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$f(1)=e^{\ln 1+1+c_2} \Leftrightarrow e=e^{c_2+1} \Leftrightarrow e^1=e^{c_2+1} \Leftrightarrow c_2=0$$

Άρα, για x < 0 είναι $-f(x)=e^{\ln(-x)+\frac{1}{x}}=e^{\ln(-x)}\cdot e^{\frac{1}{x}}=-x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, δηλαδή $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ και ομοίως, για x < 0 είναι $f(x)=e^{\ln x+\frac{1}{x}}=e^{\ln x}\cdot e^{\frac{1}{x}}=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$. Άρα $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x\in R^*$.

Η λύση αυτή δόθηκε σε πλήρη μορφή από ελάχιστους μαθητές· βασική παράλειψη όσων την επιχείρησαν ήταν η (αναμενόμενη) άγνοια για τις προϋποθέσεις ισχύος της εφαρμογής του σχολικού βιβλίου (η ισότητα των παραγώγων πρέπει να ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων). Θα παρουσιάσουμε μια λανθασμένη λύση ενός μαθητή η οποία οφείλεται σε μία ευρύτατα διαδεδομένη μεταξύ των μαθητών του Λυκείου παρανόηση για την έννοια της απόδειξης που εμφανίζεται κάθε χρόνο με μεγάλη συχνότητα στα γραπτά των πανελλαδικών εξετάσεων. Στην παραδοσιακή βιβλιογραφία της διδακτικής των Μαθηματικών η παρανόηση αυτή ήταν γνωστή ως "λήψις του ζητουμένου" δηλαδή, με άλλα λόγια, ο μαθητής αντί να αποδείξει αυτό που ζητείται κάνει απλώς επαλήθευση.

• Η "λήψις του ζητουμένου" **(Η απόδειξη γίνεται επαλήθευση)**

Έστω $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}},\ \ x\in R^*$

Τότε $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-x\cdot\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

Από το (i) έχω $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x^2}\Leftrightarrow\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{x-1}{x^2}\Leftrightarrow\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow x^2-x=x^2-x\Leftrightarrow 0=0 \text{ που ισχύει. Άρα } f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Σχόλια

Η συγκεκριμένη παρανόηση οφείλεται σε βασικότατες ελλείψεις της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Λύκειο σχετικά με τις θεμελιώδεις έννοιες της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας. Για τις ελλείψεις αυτές δεν ευθύνονται μόνο η απουσία των βασικών εννοιών της μαθηματικής Λογικής από τα διδακτικά βιβλία (επανήλθαν μερικώς στην Α΄ Λυκείου ύστερα από απουσία δύο δεκαετιών) και η ελλιπής διδασκαλία, αλλά και ορισμένες κακές διδακτικές πρακτικές, όπως είναι η κατάχρηση του συμβόλου της ισοδυναμίας στις αποδείξεις των θεωρημάτων και την επίλυση των ασκήσεων. [3]

4. Παρανοήσεις για τις τοπικές και ολικές ιδιότητες των συναρτήσεων, τα όρια και τις απροσδιόριστες μορφές

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \alpha\nu\ \ 0<x\le\pi^2 \\ \alpha & \alpha\nu\ \ x=0 \end{cases}$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του α∈R, ώστε η f να είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\ \pi^2\right]$

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

Στα θέματα αυτά οι αναμενόμενες από την επιτροπή λύσεις ήταν οι εξής:

Δ1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(0,\ \pi^2\right]$ επειδή προκύπτει από σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\ \pi^2\right]$ θα πρέπει να ισχύει

$$\alpha=f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)$$

Επειδή ισχύει $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=6\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=6\cdot\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=6$, θα είναι α = 6 και άρα

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \alpha\nu\ \ 0<x\le\pi^2 \\ 6 & \alpha\nu\ \ x=0 \end{cases}$$

Δ2. Για $0<x\le\pi^2$ είναι $f'(x)=3\cdot\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}-\eta\mu\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

Η παράγωγος της f στο 0 είναι

$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=6\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\ \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ 6\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}-1}{3x}\ \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ -\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1$$

ή πιο αναλυτικά με αλλαγή μεταβλητής:

---

[3] Θα μπορούσε να προσθέσει κανείς στα προηγούμενα και την κατάχρηση της έκφρασης "Να αποδείξετε ότι … " που γίνεται τα τελευταία χρόνια στη διατύπωση των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων. Για το ζήτημα αυτό παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στα [6] και [7] της βιβλιογραφίας.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=6\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{ημ\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\overset{u=\sqrt{x}}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{ημu-u}{u^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}6\cdot\lim_{u\to 0^+}\frac{συνu-1}{3u^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}-\lim_{u\to 0^+}\frac{ημu}{u}=-1$$

Άρα η ζητούμενη παράγωγος είναι

$$f'(x)=\begin{cases}3\cdot\dfrac{\sqrt{x}\cdot συν\sqrt{x}-ημ\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & αν\ \ 0<x\le π^2\\ -1 & αν\ \ x=0\end{cases}$$

Θα παρουσιάσουμε τις λύσεις που έδωσε στα δύο αυτά θέματα ένας μαθητής που είχε μεν ικανότητες στον αλγεβρικό λογισμό, αλλά ταυτόχρονα σημαντικές παρανοήσεις σε θεμελιώδεις έννοιες της Ανάλυσης, όπως είναι η διάκριση ανάμεσα στον τοπικό και τον ολικό χαρακτήρα των εννοιών της συνέχειας και της παραγώγου.

• Η συνέχεια, η παράγωγος και το όριο ως έννοιες και ως διαδικασίες

Δ1. Για να είναι η f συνεχής στο διάστημα $\left[0,\ π^2\right]$ πρέπει

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{6ημ\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}α$$

Θέτω $\sqrt{x}=ω\Rightarrow\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0}ω=0$ άρα ω→0 οπότε

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{ω\to 0}\frac{6ημω}{ω}=\lim_{x\to 0}α\Rightarrow 6\lim_{ω\to 0}\frac{ημω}{ω}\\ &\qquad\qquad ομως\ \ \frac{ημω}{ω}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow 6\cdot 1=α\Rightarrow\boxed{α=6}$$

Δ2. Αν $x\in\left(0,\ π^2\right]$ τότε

$$f'(x)=\left(\frac{6ημ\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)'=6\left[\frac{\left(ημ\sqrt{x}\right)'\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}\right)'ημ\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right]=$$

$$\frac{6\cdot συν\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\sqrt{x}-\dfrac{6\cdot 1}{2\sqrt{x}}\cdot ημ\sqrt{x}}{x}=\frac{6\cdot συν\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\dfrac{6\cdot 1}{2\sqrt{x}}\cdot ημ\sqrt{x}}{x}$$

$$=\frac{3συν\sqrt{x}-\dfrac{6\cdot 1}{2\sqrt{x}}\cdot ημ\sqrt{x}}{x},\ \ x\in\left(0,π^2\right]$$

Βλέπουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 0$

Πρέπει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\in R \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-6}{x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot x}$$

$$=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot x}$$

$$=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=0\in R$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 0$

άρα $f'(0)=(6)'=0 \Rightarrow f'(x)=0$ όταν x = 0, οπότε

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{x}-\dfrac{3\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot x} & \text{οταν } x\in\left(0,\pi^2\right]\\ 0 & \text{οταν } x=0\end{cases}$$

Σχόλια

Στο θέμα Δ1 παρατηρούμε ότι η συνέχεια εξετάζεται μόνο τοπικά, δηλαδή στο σημείο 0 παρά το γεγονός ότι σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να αιτιολογηθεί η συνέχεια της συνάρτησης σε ολόκληρο το διάστημα $\left[0,\ \pi^2\right]$. Επίσης η ισότητα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\alpha$ είναι λανθασμένη και δεν έχει καμία σχέση με τον υπολογισμό του ορίου και της τιμής του πραγματικού αριθμού α που ακολουθεί. Πρόκειται για μια συνηθισμένη παρανόηση ως προς το ρόλο των διαφόρων μεταβλητών που εμφανίζονται κατά τον υπολογισμό του ορίου μιας συνάρτησης.

Σε αντίθεση με τη συνέχεια, η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο θέμα Δ2 εξετάζεται και ολικά και τοπικά ίσως επειδή ο προσδιορισμός της παραγώγου είναι μια τυποποιημένη διαδικασία που εκτελείται μηχανικά. Ο μαθητής εκτελεί αυτή τη διαδικασία με άψογο τρόπο, αν εξαιρέσουμε ότι θα μπορούσε να απλοποιήσει περαιτέρω το αποτέλεσμα.

Όμως στον τοπικό υπολογισμό της παραγώγου εμφανίζονται σημαντικές παρανοήσεις σχετικά με τις προϋποθέσεις εφαρμογής της άλγεβρας των ορίων, την έννοια της απροσδιόριστης μορφής αλλά και την έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε σημείο. Στην 3^η σειρά εφαρμόζονται οι ιδιότητες για το όριο της διαφοράς και του πηλίκου δύο συναρτήσεων χωρίς να έχει εξασφαλιστεί ότι υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια, ενώ στην 4η σειρά η απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$ τίθεται ίση με το 0 προφανώς ως εφαρμογή της αλγεβρικής διαγραφής αντίθετων όρων. Τελευταία αλλά εξίσου σημαντική παρατήρηση είναι ότι η (λανθασμένη) τιμή 0 που προέκυψε από τον υπολογισμό του ορίου θεωρείται μεν ότι αποδεικνύει την παραγωγισιμότητα, αλλά επιπλέον επιβάλλεται (ως επιβεβαίωση;) να γίνει και ο υπολογισμός της παραγώγου σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης της σταθερής συνάρτησης!

Τα παραπάνω δείχνουν πολύ καθαρά ότι η ικανότητα στον αλγεβρικό λογισμό αποτελεί μια αναγκαία, αλλά κατά κανένα τρόπο ικανή συνθήκη για την κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης. Το μήνυμα είναι ιδιαίτερα σαφές προς το χώρο της διδασκαλίας, η οποία αρκείται συνήθως στην εξάσκηση των μαθητών σε τυποποιημένες διαδικασίες υπολογισμού ορίων και παραγώγων. Με τον τρόπο αυτό καλλιεργείται μια μονομερής αντίληψη και ελλιπής κατανόηση της Ανάλυσης ή για να το θέσουμε με όρους της διδακτικής των Μαθηματικών, συντηρείται η γνωστή και μεγάλη διάσταση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης.

5. Παρενέργειες της κατάχρησης υπαρξιακών θεωρημάτων

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt,\ x\in\left(0,\ \pi^2\right]$ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης F^{-1}.

Στο θέμα αυτό η αναμενόμενη από την επιτροπή λύση ήταν η εξής:

Για τη συνάρτηση $F(x)=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt,\ x\in\left(0,\ \pi^2\right]$ ισχύει

$$F(x)=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x}\frac{6\eta\mu\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=12\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x}\eta\mu\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}}\eta\mu u du=12\left[-\sigma\upsilon\nu u\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}}=-12\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$$

Επειδή η f συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)=\frac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\geq 0$ (το = ισχύει μόνο για $x = \pi^2$) και άρα είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως αντιστρέφεται και το σύνολο τιμών της θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης F^{-1}.

Επειδή η F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $\left(0,\ \pi^2\right]$ και ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-12\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\right) = -12$ και $F\left(\pi^2\right) = -12\sigma\upsilon\nu\sqrt{\pi^2} = 12$, θα έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left(-12,\ 12\right]$. Άρα για την αντίστροφή της ισχύει:

$$F^{-1} : \left(-12,\ 12\right] \to \left(0,\ \pi^2\right].$$

Θα παρουσιάσουμε τη λύση που έδωσε ένας μαθητής, ο οποίος δεν χρησιμοποίησε το αναμενόμενο κριτήριο της μονοτονίας για να αποδείξει την αντιστρεψιμότητα της F, αλλά έκανε μία τελείως απροσδόκητη εφαρμογή της “μεθοδολογίας” που έχει αναπτυχθεί γύρω από τα “υπαρξιακά” θεωρήματα της Ανάλυσης. Όπως και σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, η μεταφορά γίνεται “κατά λέξη” από το γραπτό δοκίμιο.

● Εφαρμογή ορισμών και κριτηρίων για τις ιδιότητες των συναρτήσεων

Έστω ότι η F(x) δεν είναι αντίστροφη. Τότε θα ισχύει για $F(x_1) = F(x_2)$, $x_1 \neq x_2$.

Έστω $x_1 < x_2$. Τότε:

• Η F συνεχής στο $[x_1, x_2]$, επειδή η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής, άρα το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμο, άρα και η F συνεχής.

• Η F παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

• $F(x_1) = F(x_2)$

Από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$F'(\xi) = 0 \Rightarrow \left(\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt\right)' = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$. Όμως η f(x) > 0, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Οπότε η F είναι αντίστροφη.

Για το σύνολο τιμών της F έχουμε $F'(x) = f(x) > 0$, άρα η F(x) είναι $\nearrow$ στο $\left(0, \pi^2\right]$.

Οπότε $F(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} F(x),\ F\left(\pi^2\right)\right]$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{0} f(t)dt = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{0} \frac{6\eta\mu\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

Θέτω $\sqrt{t} = u \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

Για $t = 0 \Rightarrow u = 0$ Για $t = \dfrac{\pi^2}{4} \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{2}$

Άρα $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \dfrac{6\eta\mu u}{\sqrt{t}} 2\sqrt{t}du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 12\eta\mu u du = 12 \cdot [-\sigma\upsilon\nu u]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 6 \cdot \left[-\sigma\upsilon\nu\sqrt{t}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 6 \cdot [$

• $F(\pi^2) = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} f(t)dt = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \dfrac{6\eta\mu\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

Σχόλια

Όπως βλέπουμε, για να αποδείξει την αντιστρεψιμότητα της F ο μαθητής καταφεύγει σε μια σύνθετη διαδικασία που περιλαμβάνει απαγωγή σε άτοπο, τον ισοδύναμο ορισμό της συνάρτησης 1 – 1 και το θεώρημα Rolle. Παρατηρούμε λοιπόν εδώ, όπως και στην περίπτωση του θέματος Β1, μια αδικαιολόγητη εξάρτηση από τη “μεθοδολογία” η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει τη μορφή:

“Αν έχω f(α) = f(β), τότε εφαρμόζω το θεώρημα Rolle”.

Ο μαθητής κατορθώνει βέβαια να καταλήξει στο αναγκαίο άτοπο, με αξιοθαύμαστο θα λέγαμε τρόπο. Αυτό το κατόρθωμα όμως θα πρέπει να αξιολογηθεί σε σχέση με το χρόνο και τη φαιά ουσία που διέθεσε, δεδομένου ότι υπάρχει η συντομότατη απόδειξη με χρήση της μονοτονίας που προκύπτει άμεσα από τη θετικότητα της παραγώγου (την οποία ο ίδιος αξιοποιεί αμέσως παρακάτω για να προσδιορίσει το σύνολο τιμών!)

Η αρνητική επίδραση φαίνεται μάλλον στη συνέχεια όπου, ενώ ακολουθεί μια ορθή γενικά πορεία,[4] αφήνει την προσπάθεια ανολοκλήρωτη επειδή στον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος κάνει το παιδαριώδες και μοιραίο λάθος επαναφοράς στην αρχική μεταβλητή, χωρίς αντίστοιχη επαναφορά των ορίων ολοκλήρωσης.

Κρίνοντας το ζήτημα συνολικά, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής είναι θύμα της ακατάσχετης “μεθοδολογίας” που έχει αναπτυχθεί γύρω από τα λεγόμενα “υπαρξιακά” θεωρήματα της Ανάλυσης. Η ανάλυση και ερμηνεία του φαινομένου, το οποίο έχει πολλαπλές αρνητικές συνέπειες στη διδασκαλία των Μαθηματικών, παρουσιάζει εξαιρετικό διδακτικό ενδιαφέρον αλλά βρίσκεται εκτός του πλαισίου της παρούσας εργασίας.

[4] Παραβλέπουμε ορισμένα δευτερεύοντα λάθη που δεν επηρεάζουν άμεσα την πορεία επίλυσης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Πριν προχωρήσουμε σε μια ανασκόπηση των ευρημάτων που έφερε στο φως η ποιοτική ανάλυση της επίδοσης των μαθητών και διατυπώσουμε ορισμένα συμπεράσματα και προτάσεις, θεωρούμε σκόπιμο να τονίσουμε τα εξής σημεία:

● Το διαγώνισμα προσομοίωσης πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά στο νομό Κιλκίς και είχε πιλοτικό χαρακτήρα.

● Σκοπός του διαγωνίσματος ήταν η παροχή επιπλέον βοήθειας προς τους μαθητές στο τελικό στάδιο της προετοιμασίας τους, αλλά και η ανατροφοδότηση της διδασκαλίας για τα βασικά προβλήματα μάθησης των Μαθηματικών.

● Για τη διαμόρφωση του διαγωνίσματος ελήφθησαν υπόψη τα θέματα των Εξετάσεων των ετών 2011 και 2012.

● Καταβλήθηκε προσπάθεια να καλυφθεί όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος της εξεταστέας ύλης.

● Δεν επιδιώχθηκε η ύπαρξη εξεζητημένου ή πολύ δύσκολου θέματος.

Συνοψίζοντας λοιπόν όσα εκθέσαμε λεπτομερώς στις προηγούμενες ενότητες μπορούμε να υποστηρίξουμε τα παρακάτω:

● Υπάρχει μεγάλο πρόβλημα ορθής χρήσης του αλγεβρικού λογισμού, που συνδέεται με την αδυναμία ελέγχου των πράξεων και επαλήθευσης των αποτελεσμάτων.

● Υπάρχει μεγάλη εξάρτηση των μαθητών από την "μεθοδολογία", με αποτέλεσμα την υποβάθμιση της αυτοδύναμης και κριτικής σκέψης.

● Λίγοι σχετικά μαθητές κατανοούν και αξιοποιούν τη μεγάλη ευρετική αξία της γεωμετρικής ερμηνείας των εννοιών και των προτάσεων.

● Μεγάλος αριθμός μαθητών συγχέει την έννοια της συνεπαγωγής με αυτήν της ισοδυναμίας.

● Πολλοί μαθητές δεν κατανοούν τις προϋποθέσεις εφαρμογής της άλγεβρας των ορίων και την έννοια της απροσδιόριστης μορφής.

Στα παραπάνω θα πρέπει να προσθέσουμε ακόμη ένα ζήτημα το οποίο δεν θίξαμε κατά την ανάλυση των ευρημάτων, αλλά είναι μεγάλης σημασίας:

● Υπάρχει σημαντικό πρόβλημα στη μελέτη και κατανόηση της θεωρίας, για το οποίο σημαντικό μερίδιο ευθύνης φέρουν ορισμένες διδακτικές πρακτικές όπως π.χ. η κατάχρηση της ασκησιολογίας.

Για το συγκεκριμένο ζήτημα, το οποίο απαιτεί προφανώς μια ξεχωριστή μελέτη, θα παραθέσουμε δύο στοιχεία που ανέδειξε το διαγώνισμα προσομοίωσης:

α) Στο θέμα Α2 "Να δώσετε τον ορισμό της κυρτής και της κοίλης συνάρτησης", ο ένας στους δύο μαθητές έγραψε το θεώρημα – κριτήριο (με το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου) και όχι τον ορισμό. Όπως είναι γνωστό, σύμφωνα με πάγια οδηγία της Κεντρικής Επιτροπή Εξετάσεων προς τα Βαθμολογικά Κέντρα, μια τέτοια απάντηση μηδενίζεται.

β) Ένα από τα καλύτερα γραπτά του διαγωνίσματος βαθμολογήθηκε με 0/25 μόρια στο θέμα Α της θεωρίας και με 65/75 μόρια στα θέματα Β, Γ και Δ (απαντήθηκαν σωστά όλα σχεδόν τα ερωτήματα). Στο εύλογο ερώτημα των μαθηματικών του Λυκείου γιατί δεν έγραψε τίποτε στο θέμα Α, ο μαθητής απάντησε με αφοπλιστική ειλικρίνεια ότι δεν είχε μελετήσει καθόλου θεωρία μέχρι την παραμονή του διαγωνίσματος!

Τα στοιχεία που ανέδειξε το διαγώνισμα προσομοίωσης επιβεβαιώνουν όλες σχεδόν τις διαπιστώσεις και εκτιμήσεις των εκπαιδευτικών που εμπλέκονται στη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Γ΄ Λυκείου και στη βαθμολόγηση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων:

● Τα γραπτά των μαθητών αποτελούν μια άριστη πηγή για την ανατροφοδότηση της διδασκαλίας.

● Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο έργο, που απαιτεί μακροχρόνιο και συστηματικό προγραμματισμό.

● Ειδικά, οι απαιτήσεις της ύλης και των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων της Γ΄ Λυκείου απαιτούν:

► Πλήρη κατανόηση και ευχέρεια χρήσης του αλγεβρικού λογισμού που διδάσκεται σε προηγούμενες τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου.

► Κατανόηση της διαφορετικής σημασίας του "ορισμού" και του "κριτηρίου" μιας μαθηματικής έννοιας. Στο ζήτημα αυτό είναι πολύ ουσιαστική η συμβολή της υποβαθμισμένης Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

► Κατανόηση της διαφορετικής σημασίας των εννοιών "συνεπαγωγή" και "ισοδυναμία" και του ρόλου τους στην αποδεικτική διαδικασία. Καταλυτική και στο ζήτημα αυτό είναι η συμβολή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

► Ιδιαίτερη εμβάθυνση στην έννοια του ορίου, της απροσδιόριστης μορφής και στις προϋποθέσεις εφαρμογής της άλγεβρας των ορίων.

► Ιδιαίτερη εμβάθυνση στους ορισμούς της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης, που στηρίζονται όλοι στην έννοια του ορίου.
► Συστηματική χρήση κατά τη διδασκαλία ερωτήσεων κρίσεως ή αντιπαραδειγμάτων που αναδεικνύουν τις παρενέργειες της "μεθοδολογίας" και καλλιεργούν την αυτοδύναμη σκέψη των μαθητών.

Μερικά χαρακτηριστικά στοιχεία της συζήτησης στην ημερίδα παρουσίασης των αποτελεσμάτων του διαγωνίσματος προσομοίωσης

Το υλικό αυτής της εργασίας παρουσιάστηκε σε ειδική ημερίδα που διοργάνωσε το Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Κιλκίς, σε συνεργασία με τον υπογράφοντα, στις 19 Ιουνίου 2013. Στην ημερίδα έλαβε μέρος το σύνολο σχεδόν των μαθηματικών του νομού, εντός ή εκτός του δημόσιου τομέα, καθώς και μαθηματικοί και σχολικοί σύμβουλοι άλλων περιοχών της Κεντρικής Μακεδονίας. Μετά την παρουσίαση ακολούθησε συζήτηση, από την οποία αξίζει να μεταφέρουμε εδώ ορισμένα χαρακτηριστικά στοιχεία.[5]

α) Αρχικά πρέπει να τονιστεί ότι εκδηλώθηκε θετική αποτίμηση του διαγωνίσματος προσομοίωσης από τους εκπαιδευτικούς που έλαβαν ενεργό μέρος, τόσο για την εμπειρία συμμετοχής στην επιλογή των θεμάτων όσο και για τη σημασία της συζήτησης με τους μαθητές ύστερα από τη διόρθωση των γραπτών. Σχετικά με το τελευταίο ζήτημα διατυπώθηκε η πρόταση να διεξάγεται το διαγώνισμα νωρίτερα ώστε η συζήτηση των αποτελεσμάτων να οργανώνεται πιο συστηματικά και να γίνεται με όλους τους μαθητές. Μια άλλη πρόταση, που κινείται όμως προς την αντίθετη κατεύθυνση, είναι να διεξάγεται πλησιέστερα προς την ημερομηνία των εξετάσεων ώστε οι μαθητές που συμμετέχουν να είναι καλύτερα προετοιμασμένοι.

Υπήρξε και κριτικός αντίλογος στη σκοπιμότητα διεξαγωγής διαγωνισμάτων προσομοίωσης των πανελλαδικών εξετάσεων, κυρίως για την επίπτωση μιας αποτυχίας ή επιτυχίας και τον τρόπο που αυτή βιώνεται από τους μαθητές. Γενικά όμως επισημάνθηκε η μεγάλη σημασία της ανατροφοδότησης που παρέχει η ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Λύκειο.

β) Στη διάρκεια της συζήτησης ασκήθηκε έντονη κριτική στην Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων του Υπουργείου Παιδείας για τα θέματα Μαθηματικών του Μαΐου 2013. Τα πυρά συγκέντρωσε κυρίως η ερασιτεχνική διατύπωση του θέματος Γ2 στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και το εκδικητικά δύσκολο (όπως χαρακτηρίστηκε) θέμα Β3 στα

[5] Τα πρακτικά της συζήτησης κατέγραψε η καθηγήτρια του 2ου Γυμνασίου Κιλκίς κ. Ολυμπία Χαριτίδου.

Μαθηματικά Κατεύθυνσης. Η κριτική επεκτάθηκε στο γεγονός ότι με τα θέματα που επιλέγει η Κ.Ε.Ε. η αξιολόγηση των μαθητών μέσω των πανελλαδικών εξετάσεων έχει αποκλειστικά επιλεκτική λειτουργία. Δεν λαμβάνεται υπόψη τι διδάχθηκε στο σχολείο, ούτε οι απαιτήσεις των σπουδών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά το ενδιαφέρον εστιάζεται μόνο στο φιλτράρισμα των μαθητών και την κατάταξή τους σε βαθμολογικές κλάσεις, έτσι ώστε να μη δημιουργούνται προβλήματα στη διαδικασία πρόσβασης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (π.χ. συσσώρευση αριστούχων). Με δεδομένη την άμεση επίδραση των θεμάτων σε διδάσκοντες και μαθητές, την απαξίωση του διδακτικού βιβλίου και του έργου που γίνεται στο σχολείο, τονίστηκε η ανάγκη ελέγχου της Κ.Ε.Ε. από τα θεσμικά όργανα που είναι υπεύθυνα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών και αξιολόγησης του έργου της.

γ) Το προηγούμενο ζήτημα και τα προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης που ανέδειξε το διαγώνισμα προσομοίωσης προκάλεσαν ευρύτερη συζήτηση για τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η αναγκαστική τροπή της διδασκαλίας προς τη “μεθοδολογία”, λόγω της φύσεως των θεμάτων που επιλέγει η Κ.Ε.Ε., έχουν ως συνέπεια την υποβάθμιση της θεωρίας, την έλλειψη εμβάθυνσης και αφομοίωσης των βασικών εννοιών. Η κατάσταση αυτή συνδέεται άμεσα με την αλλοίωση του χαρακτήρα της μελέτης των μαθητών, τη κακή σχέση τους με το διδακτικό βιβλίο, την αδυναμία τους να διαβάσουν κρατώντας σημειώσεις κτλ.

δ) Από τους συμμετέχοντες τονίστηκε με έμφαση η καθοριστική σημασία της Α΄ Λυκείου για τη μετέπειτα σχέση των μαθητών με τα Μαθηματικά. Η ανεπάρκεια των περισσότερων αποφοίτων του Γυμνασίου να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο και η μεγάλη έκταση της ύλης οδηγούν πολλούς μαθητές σε πρόωρη εγκατάλειψη του αγώνα και παραίτηση, γεγονός που δυσκολεύει πολύ το έργο του εκπαιδευτικού, τον αναγκάζουν να ασχολείται με τους ελάχιστους ικανούς μαθητές, τον οδηγούν σε αδιέξοδες πρακτικές όπως είναι η ταχεία διεκπεραίωση της ύλης για εξοικονόμηση χρόνου επανάληψης, κτλ.

ε) Η συζήτηση των προβλημάτων επανέφερε ένα ζήτημα που έχει τεθεί επανειλημμένα σε παρόμοιες επιμορφωτικές συναντήσεις εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (όχι μόνο των μαθηματικών). Πρόκειται για το αίτημα της κατάταξης των μαθητών στα τμήματα με βάση την επίδοση και όχι την αλφαβητική σειρά, ένα αίτημα που απορρίπτεται κατηγορηματικά από το Υπουργείο Παιδείας. Συζητήθηκαν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αυτής της πρότασης, τα παιδαγωγικά και λειτουργικά προβλήματα που δημιουργούνται και αναδείχθηκαν σημαντικές αντιθέσεις μεταξύ των εκπαιδευτικών ως προς τη σκοπιμότητα της υλοποίησής της. Κατά την άποψη του υπογράφοντος είναι χαρακτηριστικό και αξίζει να γίνει αντικείμενο μελέτης ότι το συγκεκριμένο ζήτημα εμφανίζεται από μεγάλη μερίδα μαθηματικών ως το μέσο θεραπείας του προβλήματος, ενώ παραμερίζονται πολύ πιο σημαντικοί παράγοντες όπως είναι τα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία, το είδος της βασικής κατάρτισης και η πλήρης έλλειψη επιμόρφωσης των διδασκόντων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Μ. Τουμάσης: *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Gutenberg, Αθήνα 1994..

[2] Γ. Θωμαΐδης: "Νόμιμες" αντιλήψεις και "λάθη" στα σχολικά Μαθηματικά. Δημοσιεύτηκε στα πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας *Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία*, σσ.27–45. Παιδαγωγικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών 1996.

[3] Γ. Σιγάλας: Προσπάθεια ερμηνείας λαθών στον αλγεβρικό λογισμό. *Ευκλείδης Γ΄*, τεύχος 29, σσ.102–110, 1991.

[4] Γ. Μπαραλός: Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα Μαθηματικά. Δημοσιεύτηκε στα πρακτικά του συνεδρίου *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης;* σσ.345–344. Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, Αθήνα 1-2 Νοεμβρίου 2007 & Θεσσαλονίκη 13-14 Δεκεμβρίου 2007.

[5] Γ. Θωμαΐδης, & Δ. Τσιρώνης: Η Άλγεβρα ως υπόβαθρο της Ανάλυσης: Τι αποκαλύπτουν τα γραπτά των μαθητών στις πανελλαδικές εξετάσεις. Δημοσιεύτηκε στα Πρακτικά του 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ε. Μ. Ε. *Τα Μαθηματικά ως Παγκόσμια Γλώσσα Κατανόησης και Επίλυσης Προβλημάτων*, σσ.651–660. Θεσσαλονίκη 2009.

[6] Γ. Θωμαΐδης: *Μαθηματικά & Εξετάσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2009.

[7] Γ. Θωμαΐδης: Η διδασκαλία της λογικής και της απόδειξης στο Λύκειο. Δημοσιεύτηκε στο συλλογικό τόμο της Επιστημονικής Ένωσης για τη Διδακτική των Μαθηματικών *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, σσ.115–144. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2011.